

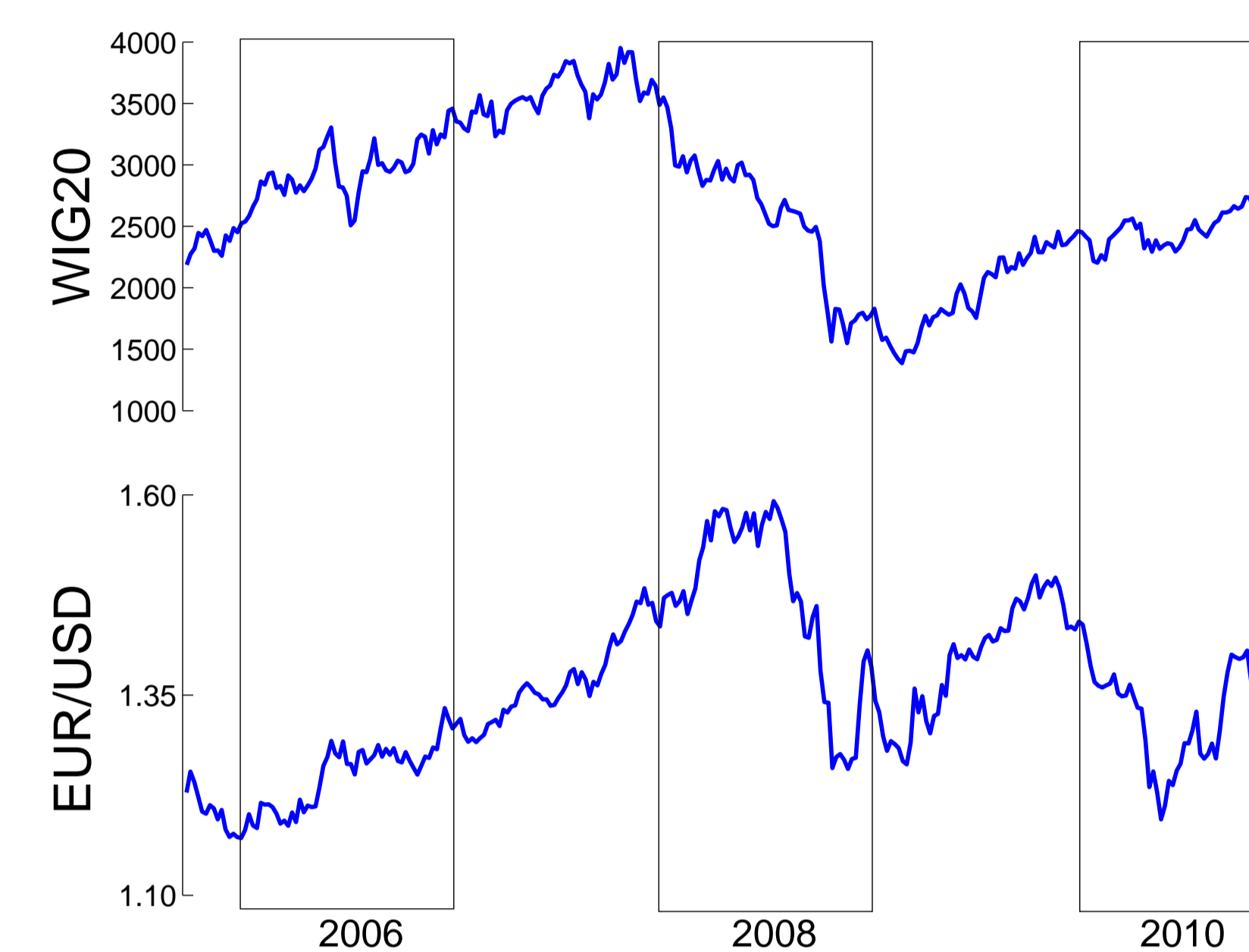
## MOTYWACJA I CEL PROJEKTU

W trakcie kryzysu finansowego wzrosło zainteresowanie analizą ryzyka inwestycyjnego. Pojawiła się silniejsza niż dotychczas krytyka popularnych metod opartych o badanie podstawowych statystyk - najczęściej średniej, wariancji i kwantyli. Podstawowym problemem tego podejścia jest utrata znacznej części informacji o rozkładzie strat. Błędne, choć bardzo popularne, jest również założenie o gaussowskim charakterze rozkładu zmian cen.

Aby poprawić efektywność metod oceny ryzyka, należy uwzględnić w rozważaniach postać rozkładu zmian cen, szczególnie: spadki kursów o dużej wartości, czyli kształt ogonów tych rozkładów. Aby to uczynić potrzebny jest model dobrze opisujący dynamikę kursu instrumentu finansowego.

Projekt ma na celu:

- Stworzenie metody analizy ryzyka wykorzystującej kształty rozkładów zmian cen - w szczególności charakter ich ogonów.
- Zbadanie zachowania instrumentów finansowych w czasie kryzysu finansowego (po 2007 roku) jego porównanie do okresu przed kryzysem.
- Konstrukcję modelu dla rozkładu zmian cen, który poprawi dokładność metody.



## ZDARZENIA EKSTREMALNE

Celem badania jest wyznaczenie parametru oceny ryzyka: najbardziej prawdopodobnej maksymalnej straty w znanym horyzoncie czasowym inwestycji. Odnajdujemy go badając charakter dużych strat, czyli analizując ogon rozkładu zmian kursu danego dobra. Przyjmijmy, że znamy analityczną postać rozkładu prawdopodobieństwa strat  $P_{\tau}$ . Możemy obliczyć prawdopodobieństwo  $P_{\leq}(-\Lambda)$  wystąpienia modułu straty  $-\Delta X \geq 0$  nie mniejszej niż wybrana wartość progowa  $\Lambda \geq 0$ :

$$P_{\leq}(-\Lambda) = P(\Lambda \leq -\Delta X) = P(\Delta X \leq -\Lambda) \\ = \int_{-\infty}^{-\Lambda} P_{\tau}(\Delta X) d\Delta X.$$

W badaniu wykorzystujemy metodę VaR (*Value at Risk* - wartość zagrożona). Wprowadzamy pewną konkretną, progową wartość ryzyka  $\Lambda_{VaR}$  oraz odpowiadającą jej ocenę ryzyka

$$P_{VaR} = P_{\leq}(-\Lambda_{VaR}).$$

Zdarzenie ekstremalne jest zdarzeniem o największej wartości bezwzględnej w badanej próbie, a zatem:

$$P_{VaR} \approx \frac{1}{N}.$$

Prawdopodobieństwo, że w horyzoncie długości  $N$  największa zaobserwowana strata będzie równa  $-\Lambda$ , wynosi

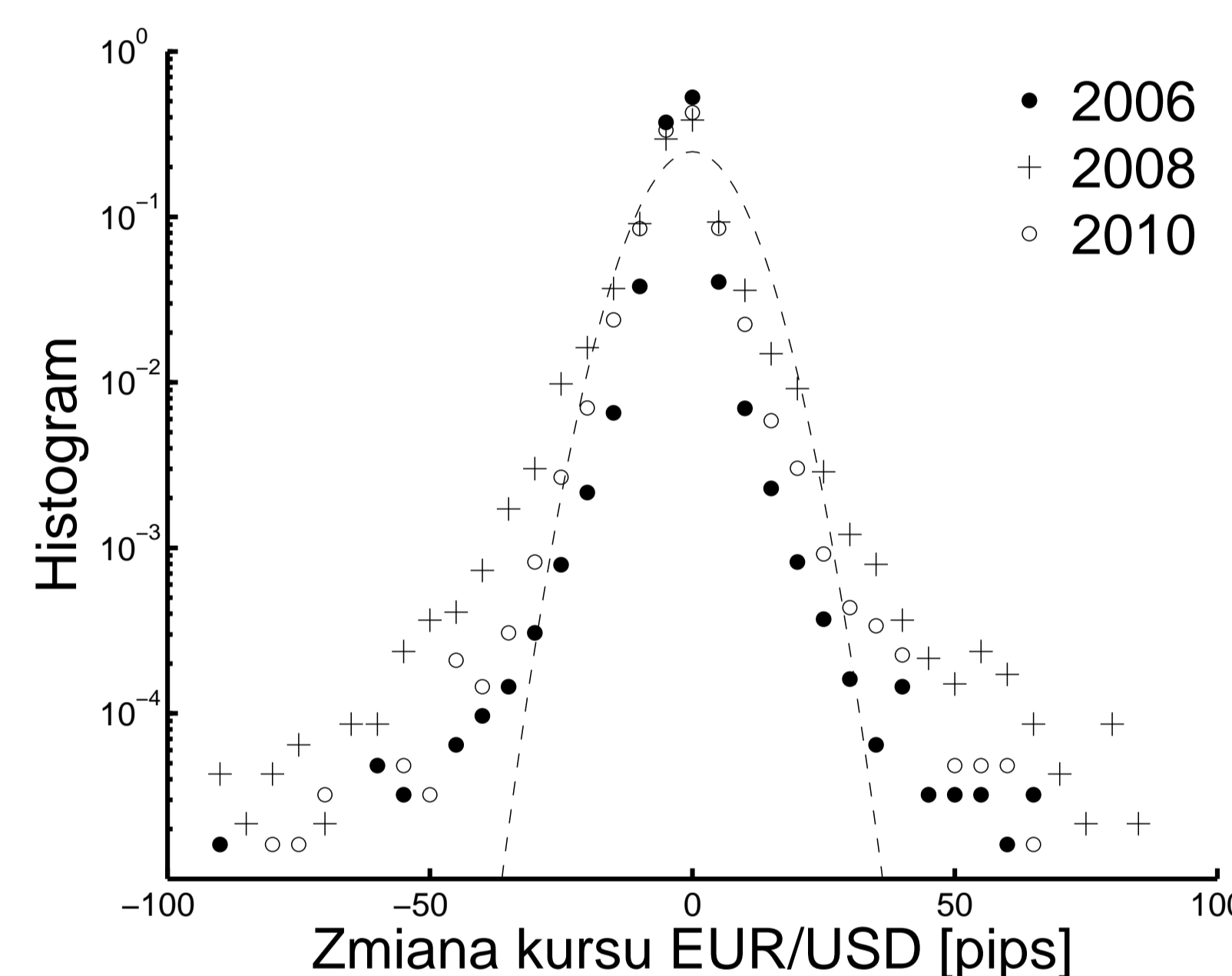
$$P(\Lambda; N) = N \cdot (P_{>}(-\Lambda))^{N-1} \cdot P_{\tau}(-\Lambda)$$

Teraz możemy odszukać najbardziej prawdopodobną największą stratę w danym horyzoncie. Jej warunkiem koniecznym jest równanie:

$$N \cdot P_{\tau}(-\Lambda_{max}) \approx -P_{>}(-\Lambda_{max}) \frac{d \ln(P_{\tau}(-\Lambda))}{d\Lambda} \Big|_{\Lambda=\Lambda_{max}}$$

## DANE HISTORYCZNE

W badaniu próbujemy kurs w stałych odstępach czasowych wynoszących 5 minut, biorąc pod uwagę ostatnią cenę transakcji. Dane pochodzą z lat 2006, 2008 i 2010 (styczeń - lipiec). Nie bierzemy pod uwagę zmian cen występujących podczas przerw w handlu (w weekendy i święta).



RYSUNEK 1: Rozkład zmian cen pary walutowej EUR/USD przy czasie próbkowania 5 minut. Szerokość przedziału histogramowania wynosi 5 pips (jednostek bezwzględnych - najmniejszych możliwych zmian cen). Linia przerywaną narysowano krzywą rozkładu normalnego dla średniej i wariancji odpowiadających danym z roku 2008.

## ROZKŁAD PARETO-LÉVY'EGO

Ponieważ szukamy zdarzeń ekstremalnych, potrzebujemy rozkładu prawdopodobieństwa dobrze opisującego ogony rozkładów zmian cen na rynkach finansowych. W badaniu zakładamy potęgowej charakter tych ogonów i wykorzystujemy standardowy model Pareto-Lévy'ego:

$$P_{\tau}(-\Lambda) = \frac{\beta}{\lambda} \frac{1}{(\Lambda/\lambda)^{\beta+1}},$$

gdzie  $\beta > 0$  jest *parametrem kształtu*, a  $\lambda \leq \Lambda$  - stałą normalizacyjną i jednostką wartości straty. Dla tego rozkładu otrzymujemy:

$$P_{\leq}(-\Lambda) = \frac{1}{(\Lambda/\lambda)^{\beta}}.$$

Korzystając z wyprowadzonych równań i modelu potęgowej możemy odnaleźć zależność między długością inwestycji, a wartością zagrożoną

$$\frac{\Lambda_{VaR}}{\lambda} \approx (P_{VaR})^{-1/\beta} \approx N^{1/\beta}.$$

Ponadto możemy skorzystać z warunku koniecznego na ekstremum rozkładu strat maksymalnych. W ten sposób otrzymujemy (dla dostatecznie długiego horyzontu -  $N \gg 1$ ) równanie na najbardziej prawdopodobną stratę maksymalną

$$\Lambda_{max} = \left( \frac{\beta}{1+\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \Lambda_{VaR} \\ \approx \left( \frac{\beta}{1+\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \lambda N^{\frac{1}{\beta}}$$

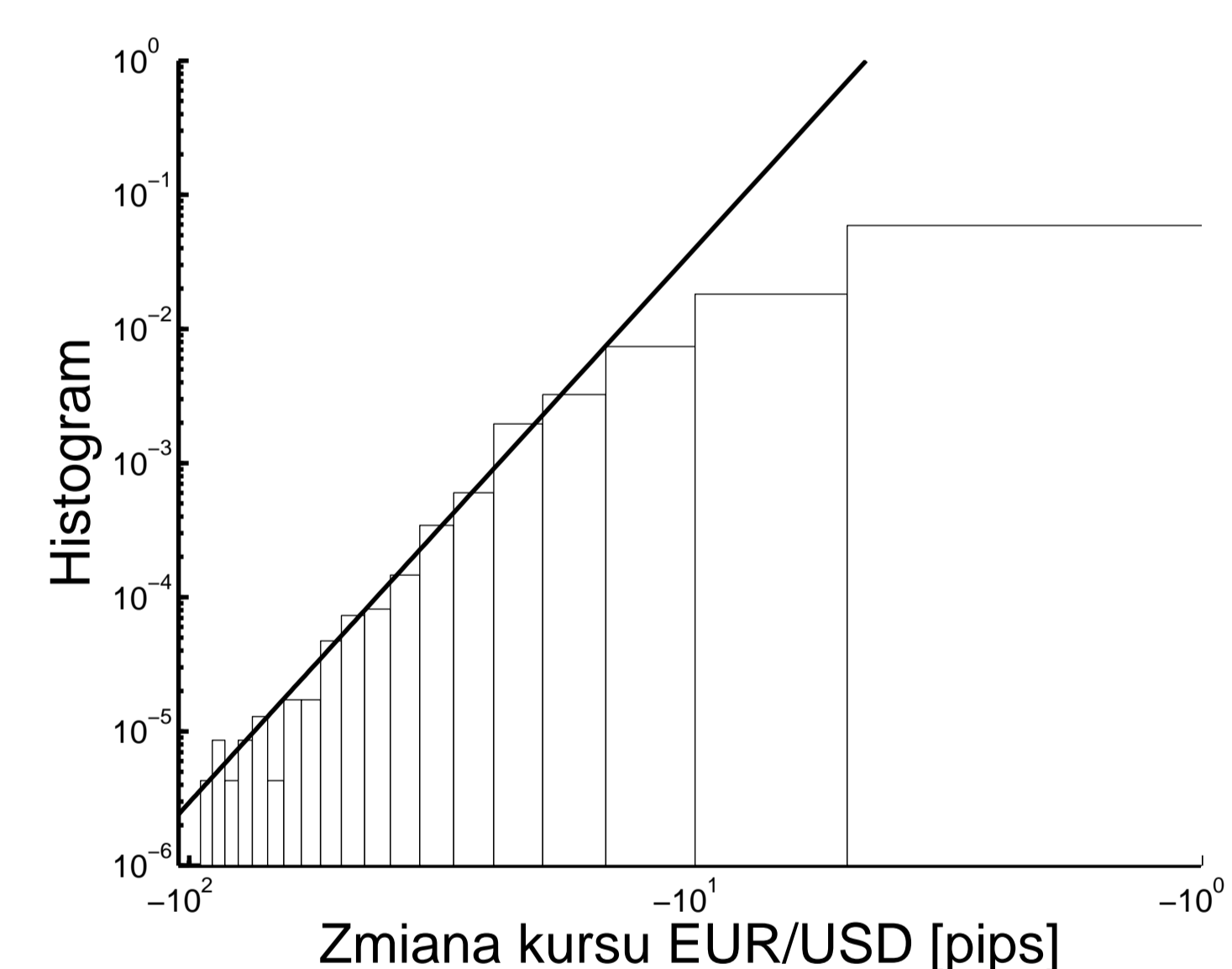
## WYNIKI

Rozkład Pareto-Lévy'ego bardzo dobrze opisuje ogony zmian cen dla badanego waloru (Rys. 2 przedstawia dopasowanie dla roku 2008 - w pozostałych latach zgodność jest lepsza). Wyznaczone parametry dopasowania przedstawia tabela:

rok	$\beta$	$\lambda$
2006	2.71	1.79
2008	3.13	5.18
2010	3.13	3.75

Zależności opisujące najbardziej prawdopodobną stratę maksymalną w horyzoncie  $N$  mają postać:

$$\Lambda_{max}^{(2006)} \approx 1.59 \cdot N^{0.37} \\ \Lambda_{max}^{(2008)} \approx 4.74 \cdot N^{0.32} \\ \Lambda_{max}^{(2010)} \approx 3.43 \cdot N^{0.32}$$



RYSUNEK 2: Dopasowanie modelu Pareto-Lévy'ego do histogramu strat w roku 2008.

## WNIOSKI

- Rozkład Pareto-Lévy'ego dobrze opisuje ogony rozkładów zmian cen pary walutowej EUR/USD.
- Parametr kształtu ogonu rozkładu potęgowej jest niemal równy dla lat 2008 i 2010. Zatem charakter zmienności w roku 2010 jest taki sam, jak podczas nerwowego okresu kryzysu finansowego. Zależność od czasu trwania inwestycji jest identyczna w obu przypadkach. Różnice polegają na stałym mnożniku odzwierciedlającym siłę trendu spadkowego - znacznie większą w roku 2008. Pojawia się zauważalna różnica względem roku 2006 (okresu hossy).

## PLANY

- Wykonanie analogicznej analizy dla dotychczas pominiętych okresów i zbadanie zmienności wyznaczonych parametrów w czasie.
- Zbadanie innych instrumentów finansowych i sprawdzenie, czy pojawia się na nich zależność zaobserwowana na parze EUR/USD.

[1] P. Kosewski, *Detekcja zdarzeń ekstremalnych w finansowych szeregach czasowych*, praca licencjacka, opiekun: R. Kutner, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski (2010).

[2] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets* (Springer, 2005).

[3] Dane historyczne: GAIN Capital