



Badanie zamożności gospodarstw domowych  
w Polsce i Unii Europejskiej  
metodami fizyki statystycznej

Maciej Jagielski, Ryszard Kutner

WYDZIAŁ FIZYKI, UNIWERSYTET WARSZAWSKI  
V Ogólnopolskie Sympozjum FENS, SGGW Warszawa 2010

Dane wykorzystane w badaniach zostały zakupione od Głównego Urzędu Statystycznego i od Eurostatu.

## Uogólniony model Lotka-Volterra

Równanie dynamiki dochodu pojedynczego gospodarstwa domowego:

$$m_i(t + \tau) = (1 + r_i(t, \tau))m_i(t) + a m(t) - c(m_1, \dots, m_N, t, \tau)m_i(t),$$

- $m_i(t)$  oznacza dochód  $i$ -tego gospodarstwa domowego w chwili  $t$ ,

## Uogólniony model Lotka-Volterra

Równanie dynamiki dochodu pojedynczego gospodarstwa domowego:

$$m_i(t + \tau) = (1 + r_i(t, \tau))m_i(t) + a m(t) - c(m_1, \dots, m_N, t, \tau)m_i(t),$$

- $m_i(t)$  oznacza dochód  $i$ -tego gospodarstwa domowego w chwili  $t$ ,
- $r_i(t, \tau)$  są liczbami losowymi (rzędu jednośc) opisywanymi takim samym rozkładem prawdopodobieństwa, dla których zachodzi:

$$\begin{aligned} \langle r_i(t, \tau) \rangle &= 0, \\ \langle r_i(t, \tau)^2 \rangle &= D. \end{aligned}$$

Stała  $D$  jest rzędu  $\tau$ . Wartości  $r_i(t, \tau)$  wyrażają losową stopę zwrotu z kapitału  $m_i(t)$  w przedziale czasu  $t, t + \tau$ ,

## Uogólniony model Lotka-Volterra

- $m(t)$  oznacza średni dochód w społeczeństwie (składającym się z  $N$  gospodarstw domowych) w chwili  $t$ :

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_j m_j(t),$$

## Uogólniony model Lotka-Volterra

- $m(t)$  oznacza średni dochód w społeczeństwie (składającym się z  $N$  gospodarstw domowych) w chwili  $t$ :

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_j m_j(t),$$

- współczynnik  $a$  (rzędu  $\tau$ ) reprezentuje dochody gospodarstw domowych pochodzące z subsydiów, świadczonych usług lub pomocy społecznej, stąd też jest on proporcjonalny do średniego dochodu  $m(t)$  (lub też bardziej ogólnie – do średniego poziomu bogactwa w społeczeństwie). Człon  $am(t)$  gwarantuje, iż dochód gospodarstwa domowego nie spadnie poniżej pewnej wartości minimalnej, a zatem nigdy nie będzie równy zeru,

## Uogólniony model Lotka-Volterra

- współczynnik  $c(m_1, \dots, m_N, t, \tau)$  eliminuje możliwość wzrostu dochodów poszczególnych gospodarstw domowych do nieskończoności. Wyraża on zewnętrzne ograniczenia takie jak skończona ilość surowców i pieniędzy w gospodarce, postęp technologiczny, wojny, katastrofy, a także uwzględnia procesy wolnego rynku: konkurencję pomiędzy inwestorami, zmienne ceny różnego rodzaju aktywów, itp. Gwarantuje on także, że wzrost średniego dochodu w społeczeństwie będzie następował do poziomu, który jest możliwy do osiągnięcia w obliczu panujących warunków zewnętrznych i dostępnych zasobów. W ogólności współczynnik  $c$  opisuje stan gospodarki.

## Uogólniony model Lotka-Volterra

- Okresy, w których  $-c(m_1, \dots, m_N, t, \tau)$  jest duże i dodatnie odpowiadają boomowi gospodarczemu, kiedy średnie dochody w społeczeństwie wykazują tendencję wzrostową. Z kolei ujemne wartości  $-c(m_1, \dots, m_N, t, \tau)$  są związane z recesją, kiedy to przeważnie mamy do czynienia z małymi, bądź ujemnymi stopami zwrotu.



## Uogólniony model Lotka-Volterra

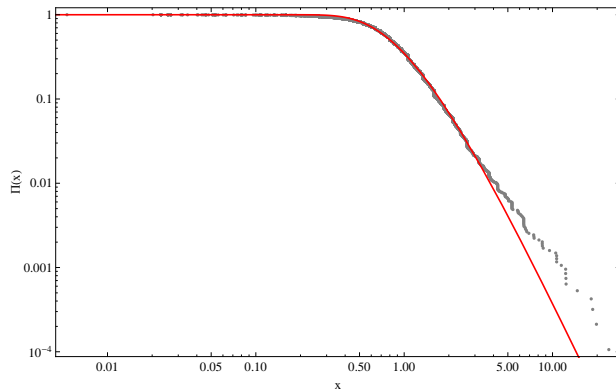
- Rozwiązanie stacjonarne istnieje dla zmiennej wyrażającej względną ilość pieniędzy posiadaną przez gospodarstwo domowe  $x_i(t) = \frac{m_i(t)}{m(t)}$

$$\Pi(x) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, \frac{\alpha-1}{x})}{\Gamma(\alpha)}.$$

# Roczne dochody osób z wykształceniem wyższym

Pareto:  $m_0 = 16009 \pm 32$ ,  $\alpha = 2.647 \pm 0.007$

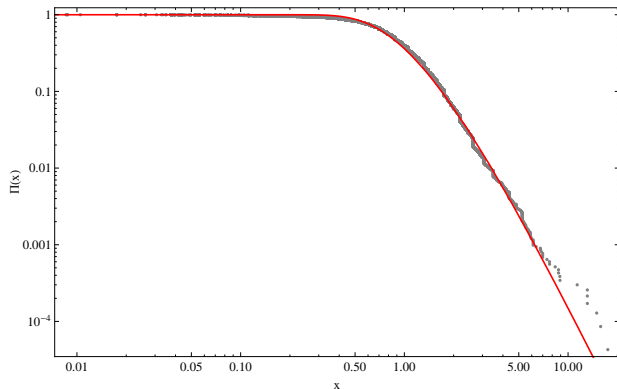
GLV:  $\alpha = 3.772 \pm 0.004$



# Roczne dochody osób z wykształceniem średnim

Pareto:  $m_0 = 11762 \pm 12$ ,  $\alpha = 3.305 \pm 0.007$

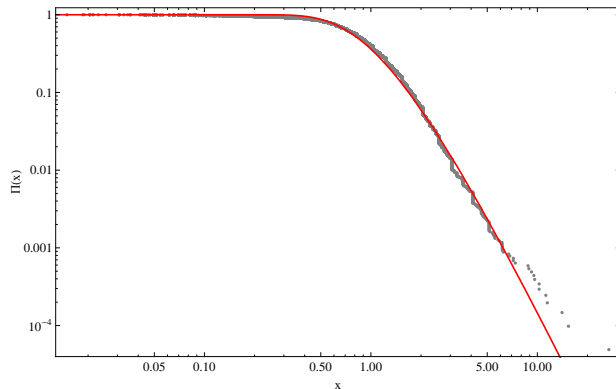
GLV:  $\alpha = 4.394 \pm 0.006$



# Roczne dochody osób z wykształceniem zawodowym

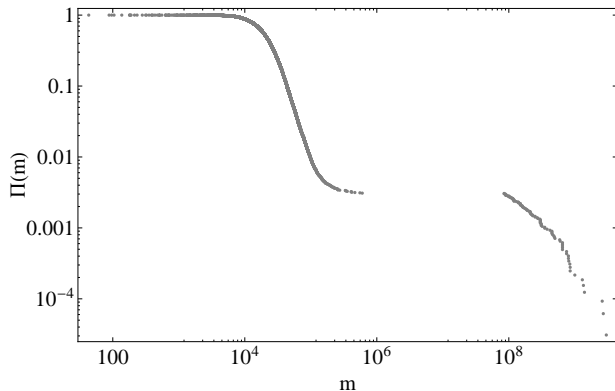
Pareto:  $m_0 = 10364 \pm 18$ ,  $\alpha = 3.405 \pm 0.008$

GLV:  $\alpha = 4.411 \pm 0.006$



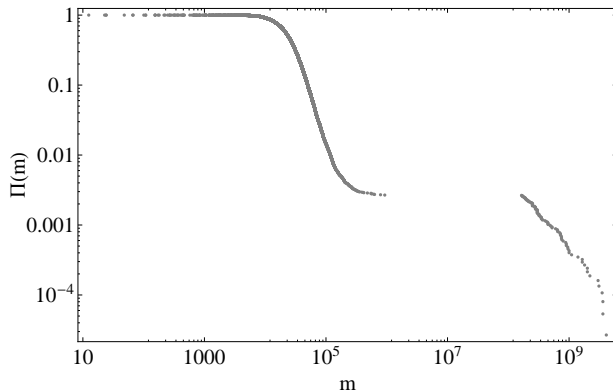
# Dochody do dyspozycji gospodarstw domowych – rok 2003

Poland – year 2003



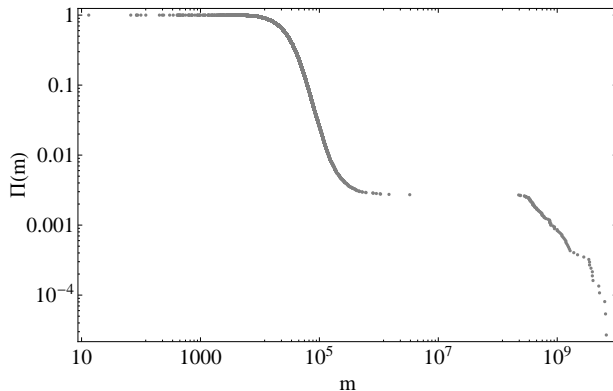
# Dochody do dyspozycji gospodarstw domowych – rok 2006

Poland – year 2006



# Dochody do dyspozycji gospodarstw domowych – rok 2008

Poland – year 2008

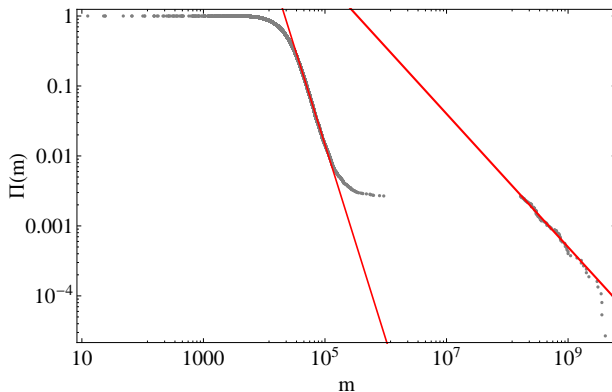


# Dochody do dyspozycji gospodarstw domowych – rok 2006, Pareto

Pareto – średniozamożni:  $m_0 = 21\,793 \pm 7$ ,  $\alpha = 2.779 \pm 0.001$

Pareto – krezusi:  $m_0 = 341\,000 \pm 30\,000$ ,  $\alpha = 0.95 \pm 0.01$

Poland – year 2006

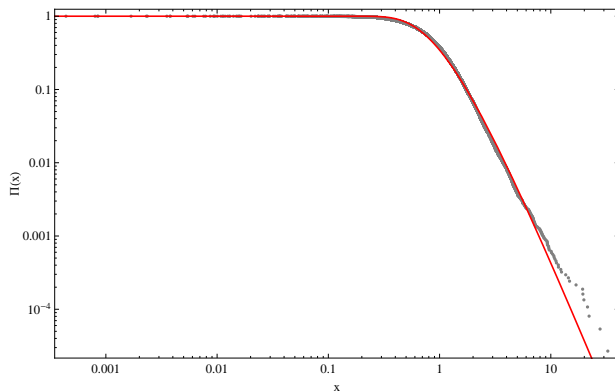




# Dochody do dyspozycji gospodarstw domowych – rok 2006, Uogólniony model Lotka-Volterra

GLV:  $\alpha = 3.677 \pm 0.003$

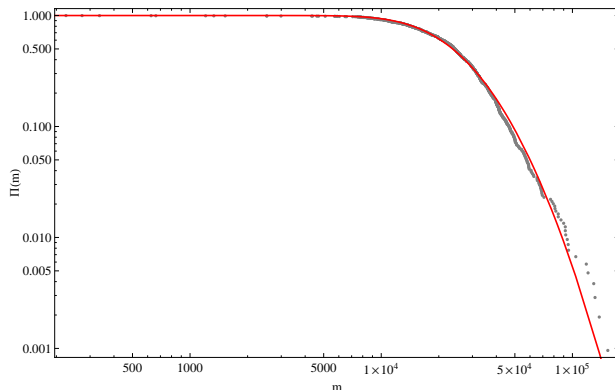
Poland – year 2006



# Dochody do dyspozycji gospodarstw domowych – województwo opolskie, Prawo Efektów Proporcjonalnych

LN:  $\mu = 10.071 \pm 0.001$ ,  $\sigma = 0.567 \pm 0.001$

Poland – opolskie, year 2006



- Do opisu rozkładu skumulowanego dochodów ludności można wykorzystać następujące modele teoretyczne:
  - Uogólniony model Lotka-Volterra,
  - Prawo Efektów Proporcjonalnych,
  - Prawa Pareto.

- Do opisu rozkładu skumulowanego dochodów ludności można wykorzystać następujące modele teoretyczne:
  - Uogólniony model Lotka-Volterra,
  - Prawo Efektów Proporcjonalnych,
  - Prawa Pareto.
- Parametry modeli GLV i praw Pareto mogą stanowić podstawę do zdefiniowania wskaźnika nierówności społecznych.

- Do opisu rozkładu skumulowanego dochodów ludności można wykorzystać następujące modele teoretyczne:
  - Uogólniony model Lotka-Volterra,
  - Prawo Efektów Proporcjonalnych,
  - Prawa Pareto.
- Parametry modeli GLV i praw Pareto mogą stanowić podstawę do zdefiniowania wskaźnika nierówności społecznych.
- "Przerwa" na wykresach wynika z jakości i rodzaju dostępnych danych.

- Do opisu rozkładu skumulowanego dochodów ludności można wykorzystać następujące modele teoretyczne:
  - Uogólniony model Lotka-Volterra,
  - Prawo Efektów Proporcjonalnych,
  - Prawa Pareto.
- Parametry modeli GLV i praw Pareto mogą stanowić podstawę do zdefiniowania wskaźnika nierówności społecznych.
- "Przerwa" na wykresach wynika z jakości i rodzaju dostępnych danych.
- Dochody "krezusów" opisywane są prawem Pareto z wykładnikiem bliskim jedności. Interesującym wydaje się fakt, że są oni właścicielami firm, których dochody opisywane są prawem Zipfa, również z wykładnikiem równym jedności. Pytanie otwarte: Dlaczego nachylenie jest nieco mniejsze od jedności?

- Do opisu rozkładu skumulowanego dochodów ludności można wykorzystać następujące modele teoretyczne:
  - Uogólniony model Lotka-Volterra,
  - Prawo Efektów Proporcjonalnych,
  - Prawa Pareto.
- Parametry modeli GLV i praw Pareto mogą stanowić podstawę do zdefiniowania wskaźnika nierówności społecznych.
- "Przerwa" na wykresach wynika z jakości i rodzaju dostępnych danych.
- Dochody "krezusów" opisywane są prawem Pareto z wykładnikiem bliskim jedności. Interesującym wydaje się fakt, że są oni właścicielami firm, których dochody opisywane są prawem Zipfa, również z wykładnikiem równym jedności. Pytanie otwarte: Dlaczego nachylenie jest nieco mniejsze od jedności?
- Dochody gospodarstw domowych w Polsce nie dają się opisać rozkładem Boltzmann.

- Istnieją województwa, dla których dochody gospodarstw domowych najlepiej opisywane są rozkładem log-normalnym. Jest to związane z tym, iż wraz ze zmniejszaniem się nierówności społecznych wrasta wartość wykładnika Pareto, po czym nagle pojawia się rozkład log-normalny, który świadczy o tym, że w danej grupie społecznej zanikają nierówności społeczne.



- Istnieją województwa, dla których dochody gospodarstw domowych najlepiej opisywane są rozkładem log-normalnym. Jest to związane z tym, iż wraz ze zmniejszaniem się nierówności społecznych wrasta wartość wykładnika Pareto, po czym nagle pojawia się rozkład log-normalny, który świadczy o tym, że w danej grupie społecznej zanikają nierówności społeczne.
- Co dalej?:
  - analiza szeregów czasowych wartości parametrów modeli, dla różnych lat i regionów,
  - analiza danych dla Polski i innych krajów Unii Europejskiej,
  - analiza dochodów najbogatszych w innych krajach,
  - weryfikacja modeli teoretycznych poprzez symulacje, budowa modeli "czysto" symulacyjnych.




## Bibliografia

-  Richmond P., Hutzler S., Coelho R., Repetowicz P., *A Review of Empirical Studies and Models of Income Distributions in Society in Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives*, Chakrabarti B. K., Chakraborti A., Chatterjee A. (Eds.), WILEY-VCH, Weinheim, 2006.
-  Chatterjee A., Chakrabarti B. K., *Kinetic exchange models for income and wealth distributions*, The European Physical Journal B (60), 2007, s. 135–149.
-  Mandelbrot B., *The Pareto-Levy Law and the Distribution of Income*, International Economic Review (1), 1960, s. 79–106.
-  Armatte M., *Robert Gibrat la loi de l'effet proportionnel*, Mathématiques et sciences humaines (129), 1995, s. 5–35.




## Bibliografia

-  Sutton J., *Gibrat's Legacy*, Journal of Economic Literature (35), 1997, s. 40–59.
-  Champernowne D. G., *A Model of Income Distribution*, The Economic Journal (63), 1953, s. 318–351.
-  Mandelbrot B., *New Methods in Statistical Economics*, The Journal of Political Economy (71), 1963, s. 421–440.
-  Solomon S., Richmond P., *Stable power laws in variable economies; Lotka-Volterra implies Pareto-Zipf*, The European Physical Journal B (27), 2002, s. 257—261.
-  Richmond P., Solomon S., *Power laws are disguised Boltzmann laws*, International Journal of Modern Physics C (12), 2001, s. 333–343.

## Bibliografia

-  Van Kampen N. G., *Procesy stochastyczne w fizyce i chemii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1990.
-  Kutner R., *Wstęp do ekonofizyki: Niegaussowskie procesy stochastyczne i niedebye'owska relaksacja w świecie realnym*, 2008, skrypt dostępny na stronie <http://www.fuw.edu.pl>
-  Dragulescu A., Yakovenko V. M., *Statistical mechanics of money*, The European Physical Journal B (17), 2000, s. 723–729.

## Bibliografia

-  Chatterjee A., Chakrabarti B. K., Stinchcombe R. B., *Master equation for a kinetic model of a trading market and its analytic solution*, Physical Review E (72), 2005, s. 026126.
-  Bhattacharyya P., Chatterjee A., Chakrabarti B. K., *A common mode of origin of power laws in models of market and earthquake*, Physica A (381), 2005, s. 377—382.
-  Coelho R., *Models for wealth distribution in societies*, poster zaprezentowany na Spring Weekend Meeting from IOP Ireland, 18th March - 20th March 2005, Newbrigde, Co. Kildare, Ireland.